Приложение 2 к РПД
Введение в функциональный анализ
01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль)
Управление данными и машинное обучение
Форма обучения – очная
Год набора – 2021

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
3.	Направленность (профиль)	Управление данными и машинное обучение
4.	Дисциплина (модуль)	К.М.01.05 Введение в функциональный анализ
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2021

2. Перечень компетенций

– **ОПК-3**: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	**Уметь:**	**Владеть:**	
Мощность множества	ОПК-3	основные методы доказательств теорем и утверждений функционального анализа	доказывать основные теоремы и утверждения функционального анализа, проверять выполнение аксиом метрики и нормы, решать основные типы задач данного курса, используя при этом изученный аппарат	владеть основными понятиями функционального анализа, математическим аппаратом, необходимым при изучении других дисциплин	Контрольная работа Коллоквиум Экзамен
Классификация пространств. Метрические пространства	ОПК-3				
Линейные нормированные пространства	ОПК-3				
Принцип сжимающих отображений и его применения	ОПК-3				
Линейные функционалы и операторы	ОПК-3				

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы: «неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1. Контрольная работа

Количество правильно решенных заданий	1	2	3	4	5
Количество баллов за решенное задание	4	4	4	4	4
Итого:	20				

2. Коллоквиум

Номер вопроса	1	2
Количество баллов за ответ на вопрос	10	10
Итого:	20	

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Типовое контрольное задание

1. Какова мощность множества всех последовательностей действительных чисел?

Решение. Пусть $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ произвольная последовательность действительных чисел. Так как множество всех последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума, то каждому числу $x_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ соответствует последовательность натуральных чисел $c_{n_1},\ c_{n_2},c_{n_3},\ \ldots$ Перенумеруем множество всех пар натуральных чисел $(n,\ m)$: $(n_1,\ m_1),\ (n_2,\ m_2),\ (n_3,\ m_3),\ \ldots$ (это возможно, так как множество таких пар счетно) и поставим в соответствие последовательности $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ последовательность натуральных чисел $c_{n_1m_1},\ c_{n_2m_2},\ c_{n_3m_3},\ \ldots$ Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех последовательностей действительных чисел и множеством всех последовательностей натуральных чисел. Значит, рассматриваемое множество имеет мощность континуума.

Ответ. Мощность континуума.

2. Являются ли метриками на прямой следующие функции:

а) $\rho(x,\ y)=x^3-y^3$, б) $\rho(x,\ y)=\left|x^3-y^3\right|$, в) $\rho(x,\ y)=\left|x^2-y^2\right|$.

Решение. а) нет, так как не выполнено условие $\rho(x,\ y)\geq 0$.

б) Да, так как выполнены все аксиомы метрики. В самом деле, 1) Очевидно, что $\rho(x,\ y)\geq 0$, кроме того $\rho(x,\ y)=0 \Leftrightarrow \left|x^3-y^3\right|=0 \Leftrightarrow x^3-y^3=0 \Leftrightarrow x^3=y^3 \Leftrightarrow x=y$.

2) $\rho(x,\ y)=\left|x^3-y^3\right|=\left|y^3-x^3\right|=\rho(y,\ x)$,

3) $\rho(x,\ y)=\left|x^3-y^3\right|=\left|\left(x^3-z^3\right)+\left(z^3-y^3\right)\right|\leq\left|x^3-z^3\right|+\left|z^3-y^3\right|=\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$.

Таким образом, $\rho(x,\ y)$ метрика на $\mathbb{R}$.

в) нет, так как $\rho(-1,\ 1)=0$, но $x\neq y$, то есть не выполнена первая аксиома.

3. Пусть E - предгильбертово пространство. Доказать, что $\forall x,\ y\in E$ выполняется равенство $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$. Какую геометрическую теорему обобщает это соотношение?

Решение. $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,\ x+y)+(x-y,\ x-y)=(x,\ x)+2(x,\ y)+(y,\ y)+$

$+(x,\ x)-2(x,\ y)+(y,\ y)=2(x,\ x)+2(y,\ y)=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

Это соотношение обобщает теорему: в параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.

Вопросы к коллоквиуму:

1. Банаховы и гильбертовы пространства. Скалярное произведение. Лемма: функция $\sqrt{(a, a)} = \|a\|$ является нормой. Евклидовы пространства.
2. Внутренние, внешние и граничные точки множества в метрическом пространстве.
3. Классификация пространств. Топологические пространства. Хаусдорфовость пространства.
4. Лемма о последовательности стягивающихся шаров.
5. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах. Линейные функционалы.
6. Линейные пространства. Линейные нормированные пространства. Определение метрики в нормированном пространстве.
7. Непрерывные отображения метрических пространств.
8. Общий вид оператора проектирования на гиперплоскость. Сопряженное пространство и сопряженный оператор.
9. Определение метрических пространств. Примеры метрических пространств.
10. Определение сжимающего отображения. Неподвижная точка сжимающего отображения. Принцип сжимающих отображений.
11. Основы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.
12. Понятие компакта. Компакты в и полнота пространства . Свойства непрерывных функций на компакте. (Определение. Теорема1, Леммы 1-3).
13. Понятие компакта. Компакты в и полнота пространства . Свойства непрерывных функций на компакте. (Теоремы 2-4). Связные множества и непрерывность
14. Применения принципа сжимающих отображений.
15. Сходимость в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства. Непрерывность метрики.
16. Хаусдорфовость метрического пространства в естественной топологии.

Вопросы к экзамену:

1. Классификация пространств. Топологические пространства. Хаусдорфовость пространства.
2. Определение метрических пространств. Примеры метрических пространств.
3. Хаусдорфовость метрического пространства в естественной топологии.
4. Сходимость в метрическом пространстве. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства. Непрерывность метрики.
5. Внутренние, внешние и граничные точки множества в метрическом пространстве.
6. Линейные пространства. Линейные нормированные пространства. Определение метрики в нормированном пространстве.
7. Банаховы и гильбертовы пространства. Скалярное произведение. Лемма: функция $\sqrt{(a, a)} = \|a\|$ является нормой. Евклидовы пространства.
8. Лемма о последовательности стягивающихся шаров.
9. Определение сжимающего отображения. Неподвижная точка сжимающего отображения. Принцип сжимающих отображений.
10. Применения принципа сжимающих отображений.
11. Непрерывные отображения метрических пространств.
12. Понятие компакта. Компакты в и полнота пространства . Свойства непрерывных функций на компакте. (Определение. Теорема1, Леммы 1-3).
13. Понятие компакта. Компакты в и полнота пространства . Свойства непрерывных функций на компакте. (Теоремы 2-4). Связные множества и непрерывность
14. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах. Линейные функционалы.
15. Общий вид оператора проектирования на гиперплоскость. Сопряженное пространство и сопряженный оператор.
16. Основы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.